

Varianta 19

SUBIECTUL I

- a) $AB = \sqrt{2}$.
- b) $m = -1$ și $n = 3$.
- c) $AB = 2$, $BC = 2$ și $AC = 2$ deci $\triangle ABC$ este echilateral.
- d) $2 \cdot \sin^2 45^\circ = 1$.
- e) $(1 - i)(1 + i) = 2$.
- f) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) 15.
- b) $5! - 3! = 114$.
- c) $x = -1$.
- d) Restul este $f(2) = 33$.
- e) $(f \circ f)(1) = -3$.

2.

- a) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -3$.
- b) $f'(x) = 3x^2 + 6x$.
- c) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ sunt punctele de extrem ale funcției f .
- d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2}{3x^3 + 6x^2} = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

- a) $A^2 = O_2$.
- b) $I_2 = X(0) \in G \Rightarrow I_2 \in G$.
- c) $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a + b)A = X(a + b)$.
- d) Folosind c) avem că $X(2) \cdot X(-2) = X(0) = I_2$.
- e) Din c) $\Rightarrow X(a) \cdot X(b) = X(a + b) = X(b + a) = X(b) \cdot X(a)$ și
 $X(a)X(-a) = X(0) = I_2$. Atunci $X(-2007) \cdot X(-2006) \cdot \dots \cdot X(0) \cdot \dots \cdot X(2007) =$
 $(X(-2007) \cdot X(2007)) \cdot (X(-2006) \cdot X(2006)) \cdot \dots \cdot (X(-1) \cdot X(1)) \cdot X(0) = I_2$.
- f) Fie $P(n): (X(a))^n = X(na)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): X(a) = X(a)(A).$$

Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k): (X(a))^k = X(ka), \text{ iar } P(k+1): (X(a))^{k+1} = X((k+1)a).$$

$$\text{Dar } (X(a))^{k+1} = (X(a))^k \cdot X(a) \stackrel{P(k)}{=} X(ka) \cdot X(a) \stackrel{c)}{=} X((k+1)a)$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

$$\text{g) } (X(a))^{2007} \stackrel{f)}{=} X(1) \Leftrightarrow X(2007a) = X(1) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2007}.$$

SUBIECTUL IV

$$\text{a) } f(1) = 1.$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

c) F este o primitivă a funcției f dacă F este derivabilă (A) și $F'(x) = f(x)$

$$\text{.Calculăm: } F'(x) = \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} = f(x).$$

$$\text{d) } -1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}, \text{ adevărat } \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$$

$$\text{f) Folosind c) } \int_a^b f(x) dx = \ln \frac{1 + b^2}{1 + a^2}.$$

$$\text{g) Folosind f) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1. \text{ Unde am folosit limita}$$

$$\text{remarcabilă } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$